УДК 517.9; 528.21; 550.831

Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння

© Ю. І. Дубовенко, 2009

Інститут геофізики НАН України, Київ, Україна
Надійшла 31 березня 2009 р.

Представлено членом редколегії В. І. Старостенко

Сформулирована новая нелинейная задача гравиметрии, названная задачей Алексидзе. В постановке А. В. Черного она сводится к задаче восстановления потенциала силы тяжести по значениям модуля его градиента на границе Ляпунова. Рассмотрены некоторые аналитические свойства задачи. Ее решение в виде потенциала простого слоя является последовательностью решения внешних граничных задач Неймана для уравнения Лапласа при условии, что решение не очень отклоняется от заданного. Плотность простого слоя определяется из решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода для силы тяжести.

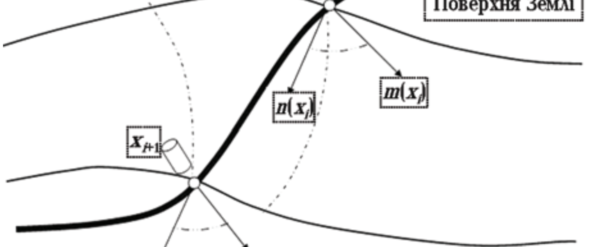
A new nonlinear gravimetric boundary problem, namely an Alexidze problem is stated. It is treated by A. Chornii as a problem of gravity potential renovation by the values of modulus of its gradients given on Liapunov's boundary. The problem's analytical properties are considered. Its solution as a simple layer potential consists of the sequence of solutions of external boundary Neumann's problems for Laplace's equation provided that the solution does not greatly deviate from the given one. A simple layer density is defined by the solution of the 2-nd kind Fredholm integral equation for the gravity.

Однією з непересічних проблем тлумачення даних аномалій потенціальних полів є створення надійної методики для побудови на їх основі адекватних вимогам сьогодення і геологічно змістовних моделей глибинної будови земної кори. Крім того, вирішення окремих прикладних завдань гравіметрії та геодезії, пов'язаних з вивченням фігури, внутрішньої будови Землі чи проявів її зовнішнього гравітаційного поля, потребує відомостей про розподіл значень потенціалу сили тяжіння чи модуля його градієнта. Для вирішення цих завдань накопичено доволі геофізичних даних, проте недостатньо розвинуті методи отримання з них всієї повноти необхідної інформації. Наявні методи трансформації потенціальних полів [Гравиразведка ..., 1990; Веселов, 1986] довершують теорію потенціалу і є інформативними у вивченні внутрішньої будови планети. Однак вони дають змогу розв'язувати з достатньою точністю ту чи іншу задачу лише за умови задання вхідної інформації в локальних областях певної малої міри. Спроби стикувати результати локальних розв'язків за відновлення інформації в глобальному масштабі зазнають невдачі [Алексидзе, 1965] через відсутність точних граничних даних для розв'язання відповідних граничних задач — Діріхле, Неймана, Стокса—Молоденського — для рівняння Лапласа. На цей час немає можливості й прямо вимірювати значення гравітаційного потенціалу, однак доступні дані гравімагнітних спостережень, що являють собою значення приросту модуля градієнта потенціалу сили тяжіння (МГПСТ). Слід скористатися цими даними для розробки схем трансформацій потенціалу в глобальній області.

З трансформацій потенціальних полів особливе місце займає задача наближеного аналітичного продовження потенціалу сили тяжіння: в моделі геологічного середовища наближено задано або диференціальний оператор, або граничні умови. На практиці найчастіше для вирішення цього завдання використову-

ють модель з точним диференціальним оператором (гармонічна апроксимація значень сили тяжіння $g_{\text{н}}(x)$) у задачі Молоденського [Пантелеев, 2001]. Відновити з гарантованою точністю поле сили тяжіння у зовнішньому просторі за його гармонічним наближенням можна розв'язанням відповідної граничної задачі в області малої міри, оскільки у вищезгаданих граничних задачах дані спостережень слугують лише наближеними граничними умовами через негармонічність відповідних функцій. Через негармонічність оператора трансформанти [Черный, 1982] (принаймні на суходолі) різко зростає похибка визначення потенціалу $g_{\text{н}}(x)$ зі збільшенням розміру локальної області. Тому трансформації на основі цих задач мають гарантовану точність лише в областях малої міри (як правило, $1^{\circ} \times$ $\times 1^{\circ}$ і з точністю до невизначеної сталої, що залежить від геометрії цієї області). Отже, гарантована точність розв'язку суттєво залежить від геометрії (рельєфу і розмірів) локальної області [Черный, 1991], а критерії для поєднання локальних розв'язків у глобальних побудовах відсутні.

Крім того, в класичному способі визначення гравіаномалій $g_{\text{н}}(x)$ не врахована та обставина, що в точках земної поверхні вектори реальної і нормальної сили тяжіння можуть мати *різні напрями* через розходження поверхні земного рельєфу та референц-еліпсоїда (див. рисунок), що особливо яскраво проявляється на стику континент—океан і в гірських районах. Просторову орієнтацію гравіметрів (нахили приладів, зумовлені різним ступенем кривизни еквіпотенціальних поверхонь, що проходять через задані пункти вимірювань) характеризує приріст кута $\alpha_i = \cos(n_i, m_i) -$ $-\cos(n_{i+1}, m_{i+1})$ між нормалями до земної



Розходження векторів реальної і нормальної сили тяжіння.

та еквіпотенціальної поверхонь у точці вимірювань.

Ні цю, ані жодну іншу величину, наприклад, значення напрямних косинусів $\cos(n, x_i)$, $i = \overline{1,3}$, що визначають напрям сили тяжіння, не вимірюють через складність організації таких спостережень у польових умовах. Розходження[1] (приріст) цих напрямів у реальних умовах коливається від 0 до 40″ і може призвести до того, що глибинні неоднорідності, які зумовлюють ці розходження, не відображатимуться в класичних аномаліях. Необхідність вивчення нелінійної граничної задачі відновлення потенціалу сили тяжіння за значеннями модуля його градієнта продиктована практичною непридатністю класичних схем відновлення потенціалу в глобальній області.

У зв'язку з переходом до глобальних побудов густинних моделей земної кори, які виконують на основі даних регіональних спостережень, виникла потреба у пошуку способів розв'язання задачі аналітичного продовження аномалій сили тяжіння, сформульованої в [Алексидзе, 1965]. У цьому напрямі в роботі [Черный, 1991] виокремлено два альтернативні напрями, що ґрунтуються на аналізі характеристичних властивостей модуля градієнта потенціалу сили тяжіння.

Перший з них потребує відшукання такого диференціального оператора, що анулює значення модуля градієнта потенціалу поза областю розміщення тяжіючих мас, та розв'язання для цього оператора відповідної лінійної граничної задачі. Результатом аналізу такого підходу є постановка і розв'язання зовнішньої задачі Діріхле для *лінійного* диференціального рівняння типу Гельмгольца (яке моделює значення МГПСТ в області, не зайнятій тяжіючими масами) з невідомим змінним коефіцієнтом, що відповідає вибраному нормальному потенціалу. Подібному ж рівнянню задовольняють і аномалії сили тяжіння [Черный, 1982]. Цей спосіб ефективний для продовження аномалій сили тяжіння, однак у разі продовження значень повного градієнта потенціалу не дає бажаних наслідків. У праці [Алексидзе, 1965] подібна схема обґрунтована і реалізована у вигляді послідовності розв'язків

[1] Розбіжність напрямів векторів реальної і нормальної сили тяжіння в точках складного рельєфу коливається до кількох десятків секунд і може "приховати" аномалії в сотні мілігал [Якимчик, 2001].

задачі Неймана для рівняння Лапласа, які визначають збурювальний потенціал.

Другий спосіб лежить у площині постановки такої *нелінійної* граничної задачі для рівняння Лапласа, в крайових умовах якої безпосередньо задіяні значення сили тяжіння. Таку задачу вперше сформулював Алексідзе [Алексидзе, 1965], а у публікації [Черный, 1991] її переформульовано з граничними даними для класу поверхонь Ляпунова за умови, що відновлюваний потенціал не дуже відхиляється від заданого.

Тому для пошуку точніших способів відновлення наближень сили тяжіння довелось вийти за межі задачі Діріхле і відшукувати уточнення коефіцієнта рівняння, первісно обчисленого для нормального потенціалу, що привело до побудови послідовних наближень потенціалу за граничними значеннями модуля його градієнта. Перехід до задачі відновлення потенціалу усунув необхідність обчислення наступних наближень як коефіцієнтів рівняння сили тяжіння, так і самих значень сили тяжіння, оскільки останні тепер можна знайти не лише з розв'язання задачі Діріхле для рівняння сили тяжіння, а й (що простіше) з безпосереднього диференціювання відновленого потенціалу.

У зв'язку з цим задача відновлення потенціалу за значеннями МГПСТ, яка не належить до класичних задач гравіметрії, набуває особливої ваги серед обернених задач теорії потенціалу. Один з можливих способів її вирішення розроблений у праці [Якимчик, 2001], а інший, під назвою "гранична задача Алексідзе для рівняння Лапласа", пропонуємо вашій увазі. Уточнімо постановку цієї задачі [Дубовенко, 2008].

За предметну модель задачі відновлення потенціалу за модулем його градієнта приймемо просту модель Землі як абсолютно твердого тіла, близького до тіла обертання, що рухається рівномірно вздовж орбіти, обертаючись навколо осі зі сталою кутовою швидкістю (без прецесії і нутації). Нехай y^- — обмежена область точок тривимірного евклідового простору, зайнята масами Землі, y^+ — необмежене доповнення до y^-, вільне від гравітуючих об'єктів, ∂y — межа множин y^- і y^+, що ототожнена з фізичною поверхнею Землі. У прямокутній декартовій системі координат $Ox_1x_2x_3$ з початком у центрі Землі, осі Ox_1, Ox_2 лежать в екваторіальній площині, а вісь Ox_3 збігається з віссю її обертання. Точки області y^- позначимо грецькими літерами, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in y^-$, а її доповнення y^+ — латинськими, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \in y^+$. Маси всередині Землі $M(\xi)$, $\xi \in y^-$, з густиною $dM(\xi) = \sigma(\xi)\, d\xi$ генерують у навколишньому просторі поле сили тяжіння, що матиме потенціал

$$W(x) = f \int_{y^-} \frac{\sigma(\xi)}{|x-\xi|}\, d\xi + \begin{cases} \Omega(x), & x \in y^- \\ 0, & x \in y^+ \end{cases}, \quad (1)$$

де f — гравітаційна стала; $\Omega(x) = 0{,}5\omega^2(x_1 + + x_2)$ — потенціал центробіжної сили; ω — модуль вектора кутової швидкості Землі. Напруженість поля (значення модуля градієнта потенціалу, за [Пантелеев, 2001]) дорівнює

$$g(x) = |-\nabla W(x)| = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial W(x)}{\partial x_k} \frac{\partial x_k(x)}{\partial n} = (\bar{g}(x), \bar{n}(x)), \quad (2)$$

де $\dfrac{\partial x_k(x)}{\partial n} = \cos(n, x_k)$, $k = 1, 2, 3$ — напрямні косинуси одиничного вектора $\bar{n}(x)$ внутрішньої нормалі до еквіпотенціальної поверхні $dW(x) : W(y) = Cx$, яка проходить через точку x.

Конкретизуймо постановку задачі: потрібно знайти функцію $W(x)$, $x \in y^+$, яка задовільняє всередині необмеженої замкнутої області $\bar{y}^+ = y^+ \cup \partial y$ рівнянню Лапласа $\Delta W(x) = 0$, $x \in y^+$, якщо в будь-якій точці ляпуновської межі ∂y області і в нескінченно віддаленій точці вона задовільняє умовам: $\sum_{k=1}^{3} \left(\dfrac{\partial W(x)}{\partial x_k} \right)^2 = g^2(x)$, $x \in \partial y$, $W(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, де $g(x)$ — задана неперервна функція. Називатимемо надалі цю *нелінійну* граничну задачу "задачею Алексідзе для рівняння Лапласа".

Проаналізуймо аналітичні особливості функції $g(x)$ модуля градієнта потенціалу; однією з її найважливіших характеристик є таке твердження [Алексидзе, 1985]. Модудь градієнта потенціалу сили тяжіння не задовольняє рівнянню Лапласа в жодній точці області y^+, що випливає з виразу (2) і є наслідком леми, яку наведено нижче.

Лема. Добуток $w(x) = u(x) \cdot v(x)$ двох функцій $u(x)$ і $v(x)$, $x \in y^-$ класу $C^{(2)}(y^-)$, гармонічний в області y^- тоді і лише тоді, коли кожен із співмножників гармонічний в y^-, а їхні градієнти $\nabla u(x)$ і $\nabla v(x)$ ортогональні один одному в області y^-.

Доведення очевидно випливає з рівності

$$\nabla^2 w(x) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial W(x)}{\partial x_k^2} = v(x) \cdot \nabla^2 u(x) + $$

$$+ 2\langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle + u(x) \cdot \nabla^2 v(x).$$

Кожна зі складових градієнта $u(x) = \dfrac{\partial W(x)}{\partial x_k}$ є гармонічною функцією, а функції $v(x) = \cos(n, x_k)$, $k = 1, 2, 3$ — ні, в чому легко переконуємося з безпосереднього обчислення.

Якби на поверхні Землі (рівняння якої вважаємо заданим), крім значень модуля градієнта потенціалу $g(x)$, $x \in \partial y$ і внутрішньої нормалі $\bar{m}(x)$ до ∂y, вимірювали напрям градієнта $\bar{n}(x)$, задача відновлення потенціалу сили тяжіння звелась би до визначення потенціалу притягання $V(x)$, $x \in y^+$, як розв'язку зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа:

$$\nabla^2 V(x) = 0,\ x \in y^+,\ \frac{\partial V(x)}{\partial m} = \Phi(x),$$

$$x \in \partial y,\ V(x) \to 0,\ |x| \to \infty, \qquad (3)$$

де $\Phi(x) = \dfrac{\partial W(x)}{\partial m} - \dfrac{\partial \Omega(x)}{\partial m} = g(x)\cos^2(n, m) -$

$$-\omega^2 \sum_{k=1}^{3} c_i \cos(n, m) = \sum_{k=1}^{3} \cos(n, x_k)\cos(x_k, m).$$

Однак напрям нормалі $\bar{n}(x)$ (див. рисунок) невідомий через виняткову складність і вартість вимірювань. Граничні дані задачі відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта $q(x) = |-\nabla V(x)|$ у межах прийнятої моделі описує вираз [Черный, 1991]

$$q^2(x) = $$

$$= q^2(x)\left\{1 - 2q^{-1}(x)\sum_{k=1}^{2}\cos(n, x_k)\frac{\partial \Omega(x)}{\partial x_k} + \right.$$

$$\left. + q^{-2}(x)\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial \Omega(x)}{\partial x_k}\right)^2\right\}$$

або

$$q_i(x) = q_{i-1}(x)\left\{\sum_{k=1}^{2}\left[\cos(n, x_k) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - q^{-1}(x)\frac{\partial \Omega(x)}{\partial x_k}\right]^2\right\}, \qquad (4)$$

через те що $\dfrac{\partial \Omega(x)}{\partial x_3} = 0$. Зробімо деякі припущення.

Введімо нормальний потенціал, що генерується фіктивними масами, що дорівнюють масам в y^-, але розташовані в певному сенсі "нормально" в деякій іншій області y_0 простої геометрії з межею ∂y_0, яка не дуже відхиляється від земної поверхні ∂y. Подамо потенціал притягання у вигляді суми $V(x) = U(x) + T(x)$ нормального $U(x)$ і збурювального $T(x)$ потенціалів, завдяки чому збурювальний потенціал описує відхилення реального розподілу мас в y^- від нормального. Нехай $\nu(x)$ — одинична внутрішня нормаль до поверхні $\partial U_x : U(y) = Cx$, а $\gamma(x) = |-\nabla U(x)|$ — модуль градієнта нормального потенціалу. Вважаємо заданими напрямні косинуси $\cos(\nu, x_k)$, $\cos(x_k, m)$ внутрішніх нормалей $\nu(x)$, $\bar{m}(x)$ до поверхонь ∂U_x і ∂y, а разом з ними і $\cos(\nu, m) = \sum_{k=1}^{3} \cos(\nu, x_k) \times \cos(x_k, m)$.

За таких припущень відновити потенціал притягання $V(x)$, $x \in y^+$ можна з граничної задачі (3) обчисленням послідовних наближень $V^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$: за знайденими з попереднього i-го кроку наближеннями $\cos(n_i, x_k)$, $k = 1, 2, 3$ напрямних косинусів нормалі $\bar{n}(x)$ визначаємо на межі ∂y за формулою (4) $i+1$-ше наближення сили тяжіння [Якимчик, 2001]:

$$q_{i+1}^2(x) = g(x)\left(\sum_{k=1}^{2}\left[\cos(n_i, x_k) - \right.\right.$$

$$-q_i^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x_k}\Bigg]\Bigg)^{-1/2}, \quad x\in\partial y,$$

$$\cos(n_i, m) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\cos(n_i, x_k)\cos(x_k, m),\ x\in\partial y,$$

$$\Phi_{i+1}(x) = q_{i+1}(x)\cos(n_i, m) =$$

$$= \gamma(x)\cos(\nu, m),\ x\in\partial y.$$

Після цього залишилось знайти розв'язок зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа:

$$\Delta T_{i+1}(x) = 0,\ x\in y^+,$$

$$\frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial m} = \Phi_{i+1}(x),\ x\in\partial y,$$

$$T_{i+1}(x)\to 0,\ |x|\to\infty, \qquad (5)$$

як потенціал простого шару мас неперервної густини $\delta_{i+1}(x)$, $x\in\partial y$, розподілених на поверхні ∂y:

$$T_{i+1}(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial y}\frac{\delta_{i+1}(\xi)}{|x-\xi|}dS_\xi,\ x\in y^+. \qquad (6)$$

Невідому густину обчислюємо з нелінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду [Черный, 1991]:

$$\delta_{i+1}(x) + \int_{\partial y}K(x,\xi)\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi =$$

$$= 2\Phi_{i+1}(x),\ x\in\partial y, \qquad (7)$$

де $K(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial m_x}\frac{1}{|x-\xi|} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(u,m)}{|x-\xi|}$,

$\cos(u,m) = \sum_{k=1}^{3}\cos(m, x_i)\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|}$, $u = x-\xi$.

Розв'язавши рівняння (7), наближено обчислимо з використанням (6) похідні потенціалу притягання:

$$V_j^{(i+1)}(x) = \frac{\partial V^{(i+1)}(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial U(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j} = -\frac{1}{4\pi}\frac{x_i-\xi_i}{|x-\xi|^3}\delta_{i+1}(\xi)dS_\xi,$$

$$j = 1,\ 2,\ 3. \qquad (8)$$

Із виразу (8) очевидно, що похідні наближень збурювального потенціалу визначаються у внутрішніх точках області y^+, а на її межі ∂y значення похідних з (8) знайти неможливо через наявність у підінтегральних функціях сильних неінтегровних особливостей. Для продовження обчислень слід знати значення похідних збурювального потенціалу саме на межі ∂y, і для їх обчислення треба передбачити спеціальну регуляризацію інтегралів (8). Припустимо, що таку операцію виконано і значення похідних (8) знайдені в точках $x\in\partial y$, тоді обчислимо такі наближення:

$$\cos(n_{i+1}, x_k) = q_{i+1}^{-1}(x)V_k^{(i+1)}(x),\ x\in\partial y,$$

$$q_{i+2}^2(x) = g(x)\Bigg\{\sum_{k=1}^{3}\big[\cos(n_{i+1}, x_k) -$$

$$-q_{i+1}^{-1}(x)\frac{\partial\Omega(x)}{\partial x}\Bigg]^2\Bigg\}^{-1/2},\ x\in\partial y,$$

$$\Phi_{i+2}(x) = q_{i+2}(x)\cos(n_{i+1}, m) =$$

$$= \gamma(x)\cos(\nu, m),\ x\in\partial y,$$

після чого знову розв'язуємо граничну задачу (5)—(7), наростивши індекс $i+1$-го наближення збурювального потенціалу $T_{i+1}(x)$ і наближення $V^{(i+1)}(x) = U(x) + T_{i+2}(x)$ потенціалу притягання і т.д.

Строге обґрунтування заміни коректної задачі (5) розв'язком граничної задачі (6)—(7) і збіжності наближень $V^{(k)}(x)$ до потенціалу притягання $V(x)$, $x \in y^{+}$ подано на прикладі близької задачі [Пантелеев, 2001]. Однозначність її розв'язку доводиться теоремою єдиності розв'язання задачі Неймана для рівняння Лапласа за модулем його градієнта за допомогою потенціалу простого шару, що зводиться до доведення збіжності обчислюваних наближень $V^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ функції $V(x)$, $x \in y^{+}$. А її, у свою чергу, легко довести, якщо виявити збіжність послідовності $\{T_k(x)\}$ наближень збурювального потенціалу: якщо $T_k(x)$ збігається з $T(x)$ при $k \to \infty$, звідси випливає збіжність не лише $V^{(k)}(x) \to$ $\to V(x)$, $x \in y^{+}$, а й зі своїми межами будь-яких інших наближень, що однозначно визначаємо за $T_k(x)$.

Надалі обчислимо величину $\varepsilon^2(x) = \dfrac{|\nabla T(x)|^2}{|\nabla U(x)|^2}$ як квадрат відношення модулів градієнтів збурювального та нормального потенціалу. Тоді справедлива така теорема [Чорний, 1995].

Теорема 1. *Якщо величиною $\varepsilon^2(x)$ можна знехтувати порівняно з $\varepsilon(x)$, то послідовність розв'язків $\{T_k(x)\}$ граничних задач (5) збігається зі збурювальним потенціалом $T(x)$ області y^{-}.*

Доведення. Досить довести збіжність послідовності $\{\delta_k(x)\}$, з якої, згідно з (6), випливає збіжність $\{T_k(x)\}$. Оператор $A\delta_i = \delta_i(x) + \int_{\partial y} K(x, \xi)\, \delta_i(\xi)\, dS_\xi$ рівняння (7) за теоремою існування розв'язку має обмежений обернений оператор A^{-1}, $\left\| A^{-1} \right\| \le c < \infty$, звідки очевидною є оцінка $\left\| \delta_{i+1}(x) - \delta_i(x) \right\| \le$ $\le 2c \left\| \Phi_{i+1}(x) - \Phi_i(x) \right\|$, а з урахуванням визначення функцій $\Phi_i(x)$ маємо

$$\left\| \delta_{i+1}(x) - \delta_i(x) \right\| \le 2c \left\| q_{i+1}(x) \right\| \left\| \cos(n_i, m) - \right.$$

$$\left. - \cos(n_{i-1}, m) \right\| +$$

$$+ 2c \left\| \cos(n_{i-1}, m) \right\| \left\| q_{i+1}(x) - q_i(x) \right\|.$$

Першим доданком у правій частині цієї нерівності можна знехтувати. Дійсно, оскільки маємо

$$q_i^2(x) = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial x_k} \right)^2 =$$

$$= \gamma^2(x) + 2\gamma(x) \frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu} + \left| \nabla T_{i-1}(x) \right|^2,$$

то, переписавши вираз для градієнта функції $T_{i-1}(x)$ з урахуванням очевидного співвідношення $\dfrac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu} = q_i(x) \cos(n_{i-1}, \nu) - \gamma(x)$, отримуємо $q_i^2(x) = \left(\gamma(x) + \dfrac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu} \right)^2 -$ $- q_i^2(x) \sin^2(n_i, \nu)$. Однак $\cos(n_{i-1}, \nu) =$ $= \sum_{k=1}^{3} \cos(n_{i-1}, x_k) \cos(x_k \nu) = 1 - \gamma^{-2}(x) \times$ $\times \left[\dfrac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu} \right]^2$, тобто кут $\cos(n_{i-1}, \nu)$ за умов теореми малий, і попередній вираз із точністю до $\varepsilon^2(x)$ набуває вигляду

$$q_i^2(x) = \gamma(x) \left(1 + \gamma^{-1}(x) \left[\frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu} \right]^2 \right). \quad (9)$$

Оскільки за визначенням з урахуванням наближеної рівності (9) маємо

$$\cos(n_i, m) = \quad (10)$$

$$= q_i^2(x) \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial U(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial x_k} \right) \cos(x_k, m) =$$

$$= \cos(\nu, m) = \left\{ 1 - \gamma^{-2}(x) \left[\frac{\partial T_{i-1}(x)}{\partial \nu} \right]^2 \right\},$$

то різниця $\cos(n_i, m) - \cos(n_{i-1}, m)$ за порядком не перевершує числа $\varepsilon^2(x)$. На основі (9) і з урахуванням граничної умови задачі (5) матимемо

$$q_{i+1}(x) - q_i(x) =$$

$$= \cos(\nu, m)\left[q_i(x)\cos(n_{i-1}, m) -\right.$$

$$\left.- q_{i-1}(x)\cos(n_{i-2}, m)\right),$$

звідки, врахувавши умову теореми та рівність (10), одержуємо ланцюжок нерівностей

$$\| q_{i+1}(x) - q_i(x) \| \le$$

$$\le \| \cos(\nu, m) \|^2 \| q_i(x) - q_{i-1}(x) \| \le$$

$$\le \| \cos(\nu, m) \|^4 \| q_{i-1}(x) - q_{i-2}(x) \| \le \ldots \le$$

$$\le \| \cos(\nu, m) \|^{2i} \| q_1(x) - q_0(x) \|.$$

Остаточно матимемо нерівність $\| \delta_{i+1}(x) - - \delta_i(x) \| \le 2c \| \cos(\nu, m) \|^{2i+1} \| q_1(x) - q_0(x) \|$, яка переконує, що послідовність $\{\delta_k(x)\}$ швидко збігається в собі за умови $\| \cos(\nu, m) \| < 1$; зі збіжності $\{\delta_k(x)\}$ в собі легко встановити збіжність з єдиною межею $\delta(x)$. За умови $\| \cos(\nu, m) \| = 1$ (напрям внутрішньої нормалі $\nu(x)$ до еквіпотенціальної поверхні ∂U_x збігається (або протилежний) з напрямом нормалі $\overline{m}(x)$ до поверхні Землі ∂y) задача зводиться до зовнішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа.

Поширити формули (8), справедливі для внутрішніх точок області y^+, на граничні точки $x \in \partial y$ допоможе таке твердження.

Теорема 2. *Якщо густина потенціалу простого шару (6) — неперервна на межі* ∂y *функція, граничні значення частинних похідних 1-го порядку від потенціалу дорівнюють*

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial y} \frac{x_k - \xi_k}{| x - \xi |} \delta(\xi) \, dS_\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} \delta(x) \cos(x_k, m_x).$$

Д о в е д е н н я теореми випливає негайно із зображення потенціалу у вигляді

$$T(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial y} \left[\delta(\xi) - \delta(x)\right] \frac{dS_\xi}{| x - \xi |} +$$

$$+ \frac{\delta(x)}{4\pi} \int_{\partial y} \frac{dS_\xi}{| x - \xi |},$$

якщо диференціювання по x_k тимчасово замінити диференціюванням по внутрішній нормалі m_x до поверхні ∂y у точці x_i і врахувати відому тотожність

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial m_x} \frac{1}{| x - \xi |} \, dS_\xi = \begin{cases} 1, & x \in y \\ 0{,}5, & x \in y^+ \\ 0, & x \in y^- \end{cases}.$$

Індекси, якими у (8) описано послідовність граничних задач, під час обчислення похідних опущено як несуттєві. Вказана в теоремі 2 формула непридатна для практичного обчислення похідних (через складність земного рельєфу), тому замість неї слід використовувати еквівалентну формулу

$$\frac{\partial T(x)}{\partial x_k} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial y} \left[\delta(\xi) - \delta(x)\right] \frac{x_k - \xi_k}{| x - \xi |} \, dS_\xi +$$

$$+ \frac{1}{2} \delta(x) \cos(x_k, m_x).$$

Зауваження: останнє рівняння, як і попередні, що фігурують в теоремах 1 і 2, є нелінійними; однак якщо зафіксувати геометрію контактної поверхні $\partial y(y)$, що задана на класі Ляпунова $C^{(2)}(y^-)$, то задача знаходження густини потенціалу простого шару стає лінійною і має однозначне розв'язання.

Отже, сформульовано нову нелінійну граничну задачу Алексідзе для відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта і вказано послідовність її розв'язку у вигляді потенціалу простого шару (6), густину якого відшукують з рівняння (7). Надалі потрібно обґрунтувати коректність постановки цієї задачі з граничними даними на ляпуновському класі $C^{(2)}(y^-)$.

Автор висловлює подяку академіку В.І. Старостенко за плідні зауваження й поради, що сприяли поліпшенню рукопису статті.

Список літератури

Алексидзе М. А. Редукция силы тяжести. — Тбилиси: Мецниереба, 1965. — 256 с.

Алексидзе М.А. Решение некоторых основных задач гравиметрии. — Тбилиси: Мецниереба, 1985. — 412 с.

Веселов К.Е. Гравиметрическая сьемка. — Москва: Недра, 1991. — 312 с.

Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Недра, 1990. — 607 с.

Дубовенко Ю.І. Спосіб відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Матеріали наук. конф. "Геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища", Львів, 6—10 жовт. 2008 р. — Львів: Сполом, 2008. — С. 156—158.

Пантелеев В.Л. Физика Земли и планет. Курс лекций. — Москва: Изд-во МГУ, 2001. — 260 с.

Черный А.В. Описание гравитационных аномалий // Докл. АН УССР. Сер. Б. — 1982. — № 4. — С. 18—21.

Черный А.В. Избранные задачи гравиметрии и гравиразведки и методы их решения: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 04.00.22. — Киев, 1991. — 429 с.

Чорний А. В. Про нову задачу для рівняння Лапласа // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Геологія. — 1995. — Вип. 13. — С. 72—80.

Якимчик А.І. Гранична задача відновлення потенціалу за значеннями модуля його градієнта: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 04.00.22. — Київ, 2001. — 16 с.